

1 Толқын теңдеуі және бастапқы-шеттік есеп

Қарапайым бірөлшемді толқын теңдеуі:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

шеттік шарттар (мысалы, Dirichlet типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

Мұндағы c — толқынның жылдамдығы, L — каналдың ұзындығы, $u(x, t)$ — ығысу (немесе деформация).

Бұл — бастапқы-шеттік есеп (BVP).

2 Айнымалыларды бөлудің әдісі

Шешімді іздейміз:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

онда $X(x)$ тек x -ке, ал $T(t)$ тек t -ке тәуелді.

Толқын теңдеуі:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

Бөліп шығару арқылы:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Мұндағы λ — белгіш тұрақты (separation constant).

3 Штурм–Лиувилль мәселесі (SL problem)

$X(x)$ функциясы үшін теңдеу:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Бұл Штурм–Лиувилль есебі, яғни:

$$\frac{d}{dx} (p(x)X') + [\lambda w(x) - q(x)]X = 0$$

Біздің жағдайда:

- $p(x) = 1, w(x) = 1, q(x) = 0$
- Шектік шарттар: $X(0) = 0, X(L) = 0$

3.1) Шектік есеп шешімі

Жалпы шешім:

$$X(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

Шектерді қолдану:

1. $X(0) = 0 \implies B = 0$
2. $X(L) = 0 \implies \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \implies \sqrt{\lambda}L = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$

Сондықтан:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Бұл — Штурм–Лиувилль спектрі және ұрпақ функциялары (eigenfunctions).

4 Уақыт функциясы $T(t)$

Теңдеу:

$$T''(t) + c^2 \lambda_n T(t) = 0 \implies T_n'' + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n = 0$$

Шешімі:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L}$$

5 Жалпы шешім (серия түрінде)

Толқын теңдеуінің жалпы шешімі:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

6 Бастапқы шарттарды қолдану

1. $u(x, 0) = \varphi(x) \implies \sum A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \varphi(x)$

→ Фурье синус сериясы арқылы A_n табамыз:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

2. $u_t(x, 0) = \psi(x) \implies \sum B_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \psi(x)$

→ B_n табамыз:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

7 Қорытынды

Толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептің шешімі (Штурм–Лиувиль әдісі арқылы):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right) \cos \frac{n\pi ct}{L} + \left(\frac{2}{n\pi c} \int_0^L \psi(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{L} d\xi \right) \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Мұндағы $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ — Штурм–Лиувиль функциялары (eigenfunctions)
- $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ — Штурм–Лиувиль спектрі (eigenvalues)

1 Есеп

Берілген толқын теңдеуі:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

шеттік шарттар (Dirichlet типі):

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0,$$

бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = 0.$$

Соңғы шарт: $c > 0$ — тұрақты.

2 Айнымалыларды бөлу

Іздейміз: $u(x, t) = X(x)T(t)$

Толқын теңдеуі: $X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t) \implies \frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

Штурм–Лиувиль есебі $X(x)$ үшін:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

Жалпы шешімі:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3 Уақыт функциясы $T_n(t)$

$$T_n'' + c^2 \lambda_n T_n = 0 \implies T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L}$$

4 Жалпы шешім

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

5 Бастапқы шарттарды қолдану

1 $u(x, 0) = \varphi(x) = \sin(\pi x/L)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \sin \frac{\pi x}{L} \implies A_1 = 1, A_{n>1} = 0$$

2 $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \implies B_n = 0 \forall n$$

6 Нәтиже

Толқын теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептің нақты шешімі:

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi ct}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

✓ Бұл шешім бір гармоникалық толқын екенін көрсетеді: $n = 1$.

7 Қосымша мысал (бірнеше гармоникалық комбинация)

Егер бастапқы шарттар:

$$\varphi(x) = \sin(\pi x/L) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x/L), \psi(x) = 0,$$

онда шешім:

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi ct}{L} \sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi ct}{L} \sin \frac{3\pi x}{L}$$

Бұл — серия түріндегі шешім, яғни бастапқы форма бірнеше гармоникадан тұрады.

1 Жалпы шешім формасы

Бастапқы-шеттік есеп үшін Штурм–Лиувилль әдісімен алынған жалпы шешім:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{L} \right] \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ — табаны немесе пространствалық гармоникалық формасы, әрбір n — жеке мод.
 - $T_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$, $\omega_n = n\pi c/L$ — уақыт бойынша гармоникалық тербеліс.
-

2 Физикалық мағынасы

1. Гармоникалық модалар:

- Әрбір n — мод (mode), яғни жеке standing wave.
- $n = 1$ — негізгі (fundamental) гармоника.
- $n > 1$ — жоғарғы гармоникалар (overtones).

2. Шекаралық шарттарға бағынады:

- $u(0, t) = u(L, t) = 0 \rightarrow$ шекарада ығысу нөлге тең.
- Сондықтан әрбір мод тербелістің тоқтау нүктелерін (nodes) шекарада қояды.

3. Амплитудасы мен фазасы:

- A_n бастапқы ығысуға байланысты.
 - B_n бастапқы жылдамдыққа байланысты.
-

3 Геометриялық интерпретация

- $\sin(n\pi x/L) \rightarrow$ толқын пішіні кеңістікте:
 - $n - 1$ ішкі нөлдік нүкте (nodes) бар.
 - n -ші гармоника n толқынды сегментке бөлінеді.
- $\cos(\omega_n t)$ және $\sin(\omega_n t) \rightarrow$ уақыт бойынша тербеліс:
 - $t = 0$ -де $\cos$ модульге сәйкес басталады.
 - $\sin$ модуль бастапқы жылдамдықты көрсетеді.

4 Мысал: бір гармоникалық шешім

Егер бастапқы шарттар:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x/L), \quad u_t(x, 0) = 0$$

онда шешім:

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi ct}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

- **Физикалық интерпретация:**
 - Бір standing wave: толық L -ке созылған бір толқынды сегмент.
 - Шекарада $x = 0$ және $x = L$ — тербеліс нөлге тең (nodes).
 - Ортада $x = L/2$ — максималды амплитуда (antinode).
 - Уақыт бойынша амплитуда $\cos(\pi ct/L)$ арқылы периодты тербеліс жасайды.
-

5 Бірнеше гармоникалар

Егер бастапқы форма күрделі болса, мысалы:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x/L) + \frac{1}{3} \sin(3\pi x/L)$$

онда:

- Бірінші гармоника $n = 1 \rightarrow$ негізгі тербеліс.
 - Үшінші гармоника $n = 3 \rightarrow$ жоғарғы мод, үш сегмент.
 - Жалпы қозғалыс — ** standing wave-лардың суперпозициясы**, яғни әрбір нүкте өз амплитудасы бойынша тербеледі.
 - Нүктелер бір-бірімен интерференция жасайды: кейбір нүктелерде амплитуда артаты, кейде төмендейді.
-

6 Графикалық бейнелеу

1. x бойынша: әрбір моментте $u(x, t)$ толқын пішінін береді.
 2. t бойынша: әрбір нүкте x -те гармоникалық тербеліс жасайды.
 3. Нүктелер (nodes) қозғалыссыз: ығысу нөл.
 4. Анти-тоқтау нүктелері (antinode) максималды тербелісте болады.
-

✓ Қорытынды

- Толқын теңдеуі бастапқы-шеттік есеп арқылы standing waves (тұрақты толқындар) ретінде шешіледі.
- Штурм–Лиувилль спектрі $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ — әрбір гармониканың кеңістік жиілігін береді.
- Бастапқы шарттар — әрбір моданың амплитудасын анықтайды (A_n, B_n).
- Күрделі бастапқы формалар $\rightarrow$ бірнеше моданың суперпозициясы $\rightarrow$ нақты қозғалыс.